

## KONSEP ALJABAR YANG TERLUPAKAN

**Eka Nurmala Sari Agustina**

Prodi Pendidikan Matematika, STKIP PGRI Sidoarjo  
(eka\_agustina\_15\_09@yahoo.co.id / eka.agustina.15@gmail.com)

### Abstrak

Penyelesaian soal matematika sering kali menggunakan konsep aljabar. Konsep aljabar tidak hanya berhenti digunakan pada jenjang sekolah menengah, tetapi sampai pada jenjang perguruan tinggi, khususnya untuk mahasiswa pendidikan matematika. Akan tetapi, dalam penerapan konsep aljabar, masih terdapat mahasiswa yang melakukan kesalahan ketika menyelesaikan soal matematika perkuliahan yang melibatkan aljabar. Kesalahan yang tampak adalah kesalahan konsep, kesalahan dalam memilih metode penyelesaian, dan kesalahan prosedural.

**Kata Kunci:** *Konsep aljabar, kesalahan konsep, kesalahan prosedural*

### Abstract

Algebra is always use to solve mathematics problems. Concep of Algebra is not use just by student at school, but until they go to collage. In reality, there are many error of the uses of Algebra concept, when some univercity students solve some problem about Algebra. The error are concept error, error of the solving methode, and procedural error.

**Key Words:** *Concept of Algebra, concept error, procedural error*

## PENDAHULUAN

Aljabar merupakan salah satu materi yang diajarkan mulai tingkat sekolah menengah pertama hingga tingkat perguruan tinggi. Aljabar dapat ditemukan pada bidang matematika yang lain seperti pada geometri dan ilmu ukur. Sebagai contoh penerapan aljabar pada bidang geometri yaitu menentukan panjang sisi persegi panjang agar luasnya maksimum jika diketahui jumlah dua sisi yang berdekatan.

Materi aljabar juga dapat diterapkan saat menyelesaikan soal yang terdapat pada jenjang perguruan tinggi, seperti menyelesaikan soal kalkulus. Contohnya ketika mahasiswa menyelesaikan soal  $\int 2x \cdot \sin(x^2) dx$ , maka mahasiswa dapat memisalkan  $x^2 = a$  sehingga  $2x dx = da$  dan diperoleh  $\int 2x \cdot \sin(x^2) dx$  menjadi  $\int \sin u du$ . Pengubahan  $x^2$  menjadi  $a$  merupakan bagian dari aljabar.

Kita telah mengetahui bahwa aljabar dapat diterapkan dalam menyelesaikan soal matematika pada jenjang perguruan tinggi, tetapi pada kenyataannya masih terdapat mahasiswa yang melupakan penerapan aljabar dalam proses pemecahan masalah matematika. Seperti yang ditemukan penulis saat mengoreksi jawaban ujian tengah semester materi kalkulus peubah banyak, terdapat mahasiswa yang salah menggunakan konsep aljabar. Mahasiswa cenderung fokus pada materi perkuliahan yang sedang dihadapi sehingga lupa bahwa materi matematika yang satu terkait dengan yang lain. Oleh karena itu, diperlukan adanya pemaparan kesalahan yang dilakukan mahasiswa dalam menerapkan aljabar.

## **MATERI ALJABAR**

Materi Aljabar yang sering diterapkan pada jenjang perguruan tinggi khususnya pada program studi pendidikan matematika adalah operasi aljabar dan konsep penyelesaian aljabar seperti metode substitusi dan eliminasi.

### **Operasi Aljabar**

Sebelum mempelajari operasi bilangan, terlebih dahulu siswa atau mahasiswa telah mengenal atau mempelajari komponen aljabar.

Komponen-komponen aljabar diantaranya adalah pengertian variabel, bentuk aljabar, keterurutan operasi bilangan, dan kalimat terbuka. (Holliday, et. al., 2008)<sup>[1]</sup>.

Variabel adalah simbol yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan yang belum diketahui nilainya. Bentuk aljabar merupakan bentuk penulisan unsur-unsur aljabar yang terdiri dari satu atau lebih bilangan dan variabel pada satu atau lebih operasi aritmatik. Contohnya:  $6x$ ,  $4y + 6$ ,  $7 - \frac{a}{b}$ ,  $3k^3$ , dsb.  $6x$  bermakna 6 dikali dengan  $x$  dan  $3k^3$  bermakna tiga dikali  $k$  selanjutnya dikali  $k$  lagi kemudian dikali  $k$  lagi. Tulisan  $4y + 6$  dapat dijabarkan bahwa 4 adalah koefisien,  $y$  adalah variabel, dan 6 adalah konstanta. (Holliday, et. al., 2008)

Keterurutan operasi bilangan adalah keterurutan proses penghitungan dari suatu operasi antar bilangan. Misalkan terdapat operasi perkalian atau pembagian dan penjumlahan atau pengurangan dalam suatu operasi bilangan yang muncul secara bersamaan, maka yang dikerjakan terlebih dahulu adalah perkalian atau pembagian. Contohnya  $5 + 10 \times 3 - 20 : 2 = 5 + 30 - 10 = 35 - 10 = 25$ . Kalimat terbuka merupakan kalimat matematika yang memuat satu atau lebih variabel dimana kalimat matematika

tersebut belum diketahui kebenarannya. Contohnya  $8n - 2 = 4$  merupakan kalimat terbuka, jika  $n$  diganti dengan 2, maka pernyataan  $8 \cdot 2 - 2 = 4$  menjadi pernyataan yang salah, tetapi jika  $n$  diganti dengan  $\frac{3}{4}$  maka pernyataan  $8 \cdot \frac{3}{4} - 2 = 4$  menjadi pernyataan yang bernilai benar. (Holliday, et. al., 2008)

Selanjutnya kita mulai mengenal operasi aljabar. Operasi Aljabar terdiri dari penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, eksponen. Konsep operasi Aljabar sama dengan sama dengan konsep operasi bilangan bulat yaitu suku-suku sejenis saling dijumlahkan atau dikurangkan. Contoh  $2x - 2y + 3y + 2x = 2x + 2x + 3y - 2y = 4x + 3y$ .

**Metode penyelesaian soal Aljabar**

Pada Aljabar kita juga mengenal persamaan seperti  $2y^2 = 6 - 2x$  atau  $x^2 = y$ . Untuk menyelesaikan persamaan tunggal seperti  $2y^2 = 6 - 2x$  dapat dilakukan dengan mencoba secara langsung. Contohnya, jika nilai  $x = 0$ , maka  $2y^2 = 6 - 0$  sehingga diperoleh  $y = \sqrt{3}$  atau  $y = -\sqrt{3}$ .

Pada materi Aljabar, terdapat sub materi tentang sistem persamaan linier dua variabel atau persamaan linier tiga variabel. Untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linier dua atau tiga

variabel, dapat digunakan beberapa metode diantaranya metode grafik, metode substitusi, dan metode eliminasi (Beecher, 2007). Namun, pada kenyataannya, metode substitusi dan metode eliminasi dapat diterapkan tidak hanya pada sistem persamaan linier dua atau tiga variabel saja.

Berikut contoh proses penyelesaian sistem persamaan dua variabel tetapi bukan persamaan yang linier. Misalkan terdapat sistem persamaan berikut, yaitu  $y^2 = 12x$  (persamaan I) dan  $xy - 3y = 0$  (persamaan II). Berikut adalah prosedur penyelesaiannya.

- Substitusi  $y^2 = 12x \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}y^2$  ke  $xy - 3y = 0$ 

$$\Rightarrow (\frac{1}{12}y^2)y - 3y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}y^3 - 3y = 0$$
 (dikalikan dengan 12)
 
$$\Rightarrow y^3 - 24y = 0$$

$$\Rightarrow y(y^2 - 24) = 0$$

$$\Rightarrow y(y - \sqrt{24})(y + \sqrt{24}) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ atau } (y - \sqrt{24}) = 0 \text{ atau } (y + \sqrt{24}) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ atau } y = \sqrt{24} \text{ atau } y = -\sqrt{24}.$$
- Substitusi nilai-nilai  $y$  ke  $x = \frac{1}{12}y^2$ .
 
$$y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = \sqrt{24} \Rightarrow x = \frac{1}{12}(\sqrt{24})^2 = 2$$

$$y = -\sqrt{24} \Rightarrow x = \frac{1}{12}(-\sqrt{24})^2 = 2$$

- Sehingga diperoleh pasangan berurutan yaitu  $(0, 0)$ ,  $(2, \sqrt{24})$  dan  $(2, -\sqrt{24})$ .

Adapula sistem persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan metode eliminasi yaitu:

$$\begin{array}{l} 12x - y^2 = 0 \\ xy - 3y = 0 \end{array} \begin{array}{l} \times y \\ \times 12 \end{array} \begin{array}{l} 12xy - y^3 = 0 \\ 12xy - 24y = 0 \end{array} \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \begin{array}{l} -y^3 + 24y = 0 \\ y^3 - 24y = 0 \end{array}$$

- Menyelesaikan  $y^3 - 24y = 0$  dengan cara memfaktorkan, diperoleh:

$$\begin{aligned} y^3 - 24y &= 0 \\ \Rightarrow y(y^2 - 24) &= 0 \\ \Rightarrow y(y - \sqrt{24})(y + \sqrt{24}) &= 0 \\ \Rightarrow y = 0 \text{ atau } (y - \sqrt{24}) = 0 \text{ atau } & \\ (y + \sqrt{24}) = 0 & \\ \Rightarrow y = 0 \text{ atau } y = \sqrt{24} \text{ atau } y = -\sqrt{24}. & \end{aligned}$$

- Substitusi nilai-nilai  $y$  ke  $x = \frac{1}{12}y^2$ .

$$y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = \sqrt{24} \Rightarrow x = \frac{1}{12}(\sqrt{24})^2 = 2$$

$$y = -\sqrt{24} \Rightarrow x = \frac{1}{12}(-\sqrt{24})^2 = 2$$

Sehingga diperoleh pasangan berurutan yaitu  $(0, 0)$ ,  $(2, \sqrt{24})$  dan  $(2, -\sqrt{24})$ .

## KESALAHAN MENYELESAIKAN SOAL MATEMATIKA

Kesalahan merupakan penyimpangan terhadap sesuatu hal yang benar (Sutopo, 2005). Jika dikaitkan dengan proses siswa menyelesaikan soal matematika maka kesalahan menyelesaikan soal matematika adalah penyimpangan jawaban yang berbeda dari proses penyelesaian soal matematika yang sebenarnya. Menurut Sandhu (2013) kesalahan dibedakan menjadi dua yaitu miskonsepsi dan kesalahan (*error*). Miskonsepsi merupakan kesalahan terhadap konsep, prosedur, dan pemahaman terhadap soal yang tidak jelas bagi siswa. Kesalahan (*error*) terjadi ketika siswa tahu apa yang harus dilakukan berikutnya, tetapi mereka salah dalam langkahnya, misal saat substitusi nilai atau kekeliruan penghitungan.

Terdapat dua jenis kesalahan menurut Kastolan (1992) yaitu kesalahan konseptuan dan kesalahan prosedural. Kesalahan konseptual merupakan kesalahan yang dilakukan mahasiswa dalam menafsirkan istilah, konsep, dan prinsip atau salah dalam menggunakannya. Indikator kesalahan konseptual yaitu:

- a) kesalahan menentukan rumus atau teorema atau definisi untuk menjawab suatu masalah,

- b) penggunaan rumus, teorema, atau definisi yang tidak sesuai dengan kondisi prasyarat berlakunya rumus, teorema, atau definisi tersebut, dan
  - c) tidak menuliskan rumus, teorema, atau definisi untuk menjawab suatu masalah.
- b) kesalahan menginterpretasikan suatu representasi dari bentuk aljabar; dan
  - c) ketidak mampu memaknai hubungan-hubungan sifat pada bentuk aljabar.
- Suatu kesalahan dikatakn sebagai kesalahan prosedural jika:

Kesalahan prosedural merupakan kesalahan dalam menyusun langkah-langkah yang hierarki sistematis untuk menjawab suatu soal. Indikator kesalahan prosedural yaitu:

- a) ketidakhirarkisan langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah, dan
- b) Kesalahan atau ketidakmampuan memanipulasi langkah-langkah untuk menjawab suatu masalah.

(Kastolan, 1992).

Abidin (2012) mengelompokkan kesalahan menjadi dua sama seperti yang disebutkan Kastolan, yaitu kesalahan konseptual dan prosedural. Kesalahan-kesalahan yang digolongkan dalam kesalahan konseptual yaitu:

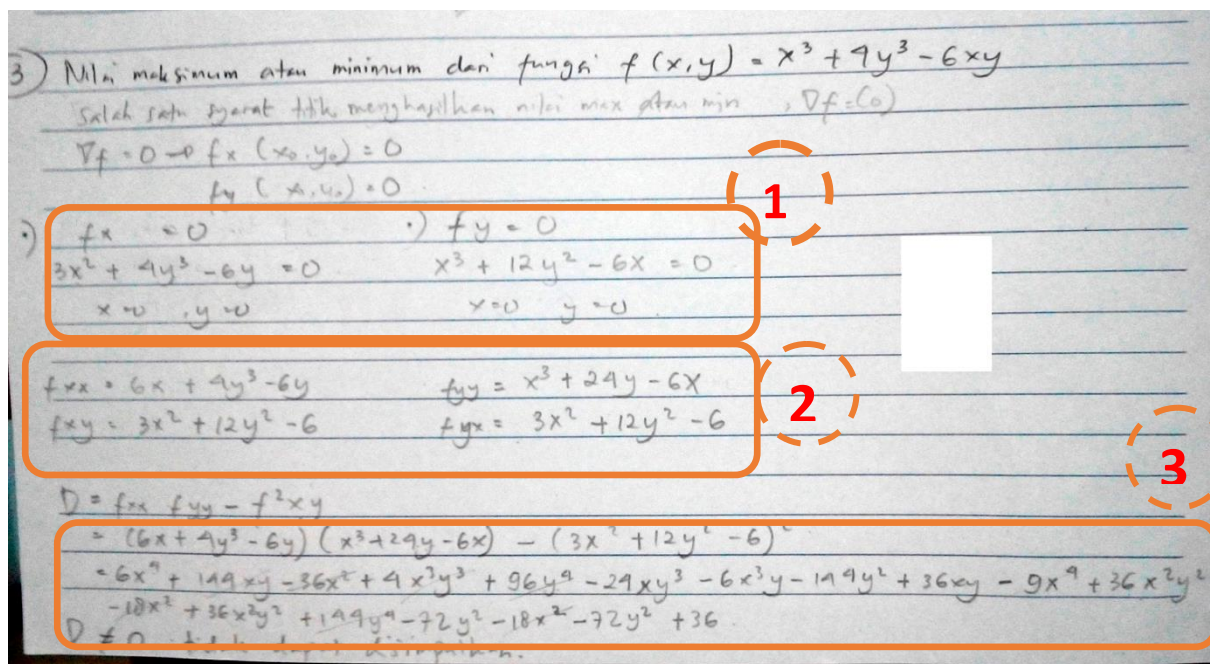
- a) kesalahan memehami definisi dan sifat-sifat variabel dari suatu bentuk aljabar;

- a) kesalahan dalam perhitungan yaitu operasi hitung penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bentuk aljabar;
- b) ketidakmampuan menulis langkah-langkah kerja dengan teratur;
- c) kesalahan dalam menerapkan aturan, prinsip, atau rumus dalam operasi aljabar; dan
- d) ketidakmampuan siswa dalam memanipulasi bentuk aljabar berdasarkan sifat dan prinsip yang berlaku.

#### **TEMUAN KESALAHAN PENGUNAAN KONSEP ALJABAR DAN PENJELASANNYA**

Berikut adalah beberapa kesalahan aljabar mahasiswa yang ditemukan penulis pada jawaban ujian tengah semester mata kuliah Kalkulus Peubah Banyak.

1.



**Bagian no. 1**

a. Mahasiswa melakukan kesalahan konsep aljabar dalam menentukan turunan pertama  $f(x, y)$  terhadap variabel  $x$  dan turunan pertama  $f(x, y)$  terhadap variabel  $y$ . Seharusnya mahasiswa menjawab  $f_x(x, y) = 3x^2 - 6y = 0$  dan  $f_y(x, y) = 12y^2 - 6x = 0$ . Mahasiswa dimungkinkan lupa atau kurang teliti bahawa jika suatu fungsi dua variabel diturunkan terhadap variabel  $x$  maka yang dioperasikan hanya yang terdapat variabel  $x$  (Purcel, et al., 2008). Tetapi, mahasiswa tetap menuliskan  $4y^3$  pada  $3x^2 + 4y^3 - 6y = 0$  walau pada  $f(x, y)$ ,  $4y^3$  tidak berpasangan dengan  $x$ . Begitu juga

untuk turunan  $f(x, y)$  terhadap variabel  $y$ .

b. Mahasiswa melakukan kesalahan prosedural yaitu tidak menggunakan metode substitusi untuk menemukan nilai  $x$  dan  $y$  tetapi mahasiswa langsung menentuka bahwa nilai  $x = 0$  dan  $y = 0$ . Hasil yang mahasiswa peroleh memang menjadikan persamaan yang mereka temukan bernilai benar. Tetapi, mahasiswa belum menemukan nilai  $(x, y)$  yang lain. Dalam hal ini mahasiswa dikatakan melakukan kesalahan prosedural karena mahasiswa tidak menuliskan prosedur yang benar untuk menentukan nilai  $x$  atau  $y$ .

**Bagian no. 2**

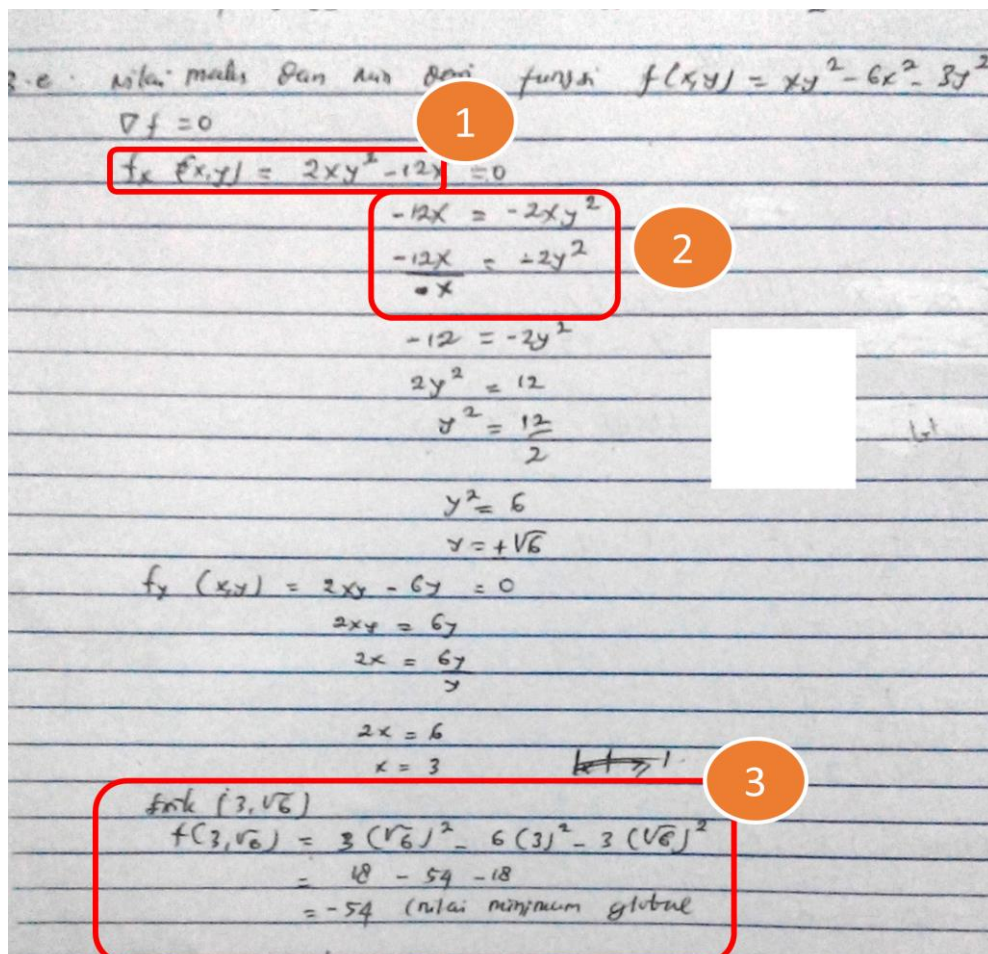
Mahasiswa melakukan kesalahan konsep aljabar dalam menentukan turunan kedua  $f(x, y)$  terhadap variabel  $x$  dengan turunan pertama juga terhadap variabel  $x$ . Mahasiswa menuliskan  $f_{xx} = 6x + 4y^3 - 6y$  yang seharusnya  $f_{xx} = 6x$  karena  $f_x(x, y) = 3x^2 - 6y$ . Terlihat dari jawaban pada bagian no. 1 mahasiswa juga melakukan hal yang sama, yaitu beranggapan bahwa jika suku yang tidak memuat variabel  $x$  seperti  $4y^3$  maka tetap ditulis pada turunan  $f$  baik

turunan pertama ataupun ke dua. Hal yang serupa juga dilakukan untuk  $f_{yy}$  dan  $f_{xy}$ .

**Bagian no. 3**

- a. Mahasiswa melakukan kesalahan prosedural dalam mengalikan bentuk aljabar dari  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ . Ada suku dari  $f_{xx}$  yang belum dikalikan dengan suku pada  $f_{yy}$ .
- b. Mahasiswa juga belum mensubstitusikan nilai  $x$  dan  $y$  setelah menemukan nilai  $x$  dan  $y$  dari prosedur  $\nabla f = 0$ .

2.



### **Bagian no. 1**

Mahasiswa melakukan kesalahan prosedural ddalam menentukan turunan pertama  $f(x, y)$  terhadap variabel  $x$ . Mahasiswa menuliskan  $f_x(x, y) = 2xy^2 - 12x$  yang seharusnya adalah  $f_x(x, y) = y^2 - 12x$ . Terlihat dari jawaban mahasiswa bahwa sebenarnya dia paham jika  $f(x, y)$  diturunkan terhadap variabel  $x$  maka yang diolah adalah suku yang memuat variabel  $x$ . Kesalahan yang dilakukan mahasiswa dimungkinkan karena kurang teliti dalam menentukan turunan  $f$ .

### **Bagian no. 2**

Prosedur yang dilakukan mahasiswa untuk menentuka nilai merupakan bagian dari metode menentukan nilai  $x$  atau  $y$ . Mahasiswa menuliskan  $-12x = -2xy^2$  kemudian membagi kedua ruas dengan  $x$ . Mahasiswa melakukan kesalahan dengan membagi kedua ruas dengan  $x$ , dimungkinkan mahasiswa lupa bahwa untuk melakukan prosedur tersebut haruslah ada jaminan bahwa  $x \neq 0$ .

### **Bagian no. 3**

Mahasiswa melakukan kesalahan prosedural karena menghilangkan tahap pengecekan dengan diskriminan

untuk mengetahui apakah nilai  $(x, y)$  yang telah ditemukan mengakibatkan  $f$  memiliki nilai maksimum atau minimum lokal atau titik pelana.

### **SIMPULAN**

Dari hasil temuan diperoleh mahasiswa melakukan kesalahan sebagai berikut.

1. Kesalahan konseptual dalam menentukan turunan fungsi dua variabel terhadap variabel  $x$  atau terhadap variabel  $y$ , baik pada turunan pertama  $f$  terhadap variabel  $x$  atau  $y$ , atau turunan kedua  $f$  terhadap variabel  $x$  atau variabel  $y$ .
2. Kesalahan prosedural yang dilakukan mahasiswa diantaranya:
  - a. Kesalahan mengalikan dua bentuk aljabar.
  - b. Kesalahan tidak mensubstitusikan nilai  $x$  dan  $y$  yang ditemukan.
  - c. Kesalahan memilih metode penentuan nilai  $x$  dan  $y$  yang seharusnya bisa dilakukan dengan metode substitusi.
  - d. Kesalahan menggunakan pembagian dengan variabel tanpa mengetahui apakah variabel tersebut bernilai 0 atau tidak.



## SARAN

1. Sebaiknya mahasiswa perlu berlatih menghubungkan konsep matematika yang satu dengan konsep matematika yang lain.
2. Sebaiknya mahasiswa tidak terfokus saja pada materi yang sedang dipelajari, tetapi juga pada konsep aljabar yang terkait dengan materi yang dipelajari.
3. Berbagai hal yang telah dipaparkan dapat dijadikan bahan awal untuk mengadakan penelitian yang lebih lanjut.

SMA Negeri Se-Kotamadya Malang.  
Malang: IKIP Malang.

Abidin, M. Z. (2012). *Kesalahan Konseptual dan Prosedural Siswa dalam Belajar Aljabar*, (Online), (<http://www.onlinesyariah.com/2012/12/08/kesalahan-konseptual-dan-prosedural-siswa-dalam-belajar-aljabar/>).

## DAFTAR PUSTAKA

- Holliday, et. al. (2008). *California Algebra 1 Concepts, Skills, and Problem Solving*. USA : The McGraw – Hill Company.
- Beecher, Judith A, et al. (2007). *Algebra and Trigonometry, 3<sup>rd</sup> Ed*. London: Addison-Wesley Publishing Company.
- Sandhu, D. (2013). *Does anyone have any information on the differences between misconceptions and errors in mathematics*. Research Gate., (Online), ([http://www.researchgate.net/post/Does\\_anyone\\_have\\_any\\_information\\_on\\_the\\_differences\\_between\\_misconceptions\\_and\\_errors\\_in\\_mathematics](http://www.researchgate.net/post/Does_anyone_have_any_information_on_the_differences_between_misconceptions_and_errors_in_mathematics))
- Kastolan, dkk. (1992). *Identifikasi Jenis-Jenis Kesalahan Menyelesaikan Soal-Soal Matematika yang Dilakukan Peserta Didik Kelas II Program Al*

